На правах рукописи

УДК 514.763.8+512.745.2

БИБИКОВ Павел Витальевич

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ В КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ АЛГЕБРЫ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2011

Работа выполнена в лаборатории №6 «Проблемы качественного исследования нелинейных динамических систем» учреждения Российской академии наук «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Лычагин Валентин Васильевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Красильщик Иосиф Семенович**
	кандидат физико-математических наук, научный сотрудник **Шурыгин Вадим Вадимович**
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет»

Защита состоится «19» января 2012 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008 Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37, ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.

Автореферат разослан «____» ________________ 2011 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.ksu.ru

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент

Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. *Бинарной формой степени* n называется однородный многочлен от двух переменных x, y степени n

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i y^{n-i},$$

коэффициенты α_i которого можно считать либо комплексными, либо вещественными.

Бинарные формы степени n образуют векторное пространство размерности $n+1$. На этом пространстве линейными преобразованиями действует группа SL_2.

Проблема описания SL_2-орбит бинарных форм данной степени n была поставлена Булем и Кэли в 1841 г. Дальнейшие исследования показали, что эта проблема в том или ином виде возникает в самых разных областях математики.

В связи с этим крупнейшие математики XIX–XX веков пытались решить проблему классификации орбит бинарных форм. Эти попытки привели к созданию целых теорий, среди которых можно отметить классическую теорию инвариантов, алгебраическую геометрию и теорию (гипер)эллиптических кривых.

Тем не менее, несмотря на значительные усилия замечательных математиков (Буля, Кэли, Эйзенштейна, Вейерштрасса, Гордана, Гильберта и др.), проблема классификации SL_2-орбит бинарных форм степени n *в общем случае осталась нерешенной.*

Наряду с проблемой классификации бинарных форм естественно сформулировать и проблему классификации тернарных форм.

Напомним, что *тернарной формой степени* n называется однородный многочлен от трех переменных x, y, z степени n

$$f(x,y,z) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k.$$

На пространстве тернарных форм степени n линейными заменами координат действует группа SL_3.

Проблема классификации тернарных форм также была поставлена в середине XIX века. Эта проблема, возможно, даже более интересна, нежели проблема классификации бинарных форм, из-за следующей геометрической интерпретации.

Каждой неприводимой тернарной форме f поставим в соответствие неприводимую алгебраическую проективную кривую $\{f = 0\}$ на проективной плоскости. Тогда проблему классификации (правда, с точностью до множителя) неприводимых тернарных форм можно сформулировать в геометрических терминах: классифицировать неприводимые алгебраические проективные кривые с точностью до проективных преобразований.

В 2006 году Лычагин и Кругликов[1] предложили новый подход к исследованию проблем описания орбит. Суть этого метода заключается в использовании дифференциальных уравнений и дифференциальных инвариантов, что дает возможность соединить алгебраические и дифференциально-геометрические подходы.

Преимущество такого подхода заключается в существовании мощных классификационных теорем, полученных Ли, Трессе и Картаном.

Степень разработанности проблемы. К настоящему времени получена классификация бинарных форм лишь степени $n \leqslant 10$.

Случай $n = 3$ был решен Булем в 1841 г.

Первый нетривиальный случай $n = 4$ был решен Булем[2], Кэли и Эйзенштейном в 1841–1850 гг. и положил начало классической теории инвариантов. Отметим, что классификация бинарных форм степени 4 тесно связана с двойным отношением четырех точек на проективной прямой, а также с j-инвариантом эллиптической кривой.

Случаи $n = 5, 6, 7, 8$ были решены Кэли, Эрмитом[3], Горданом, Шиодой[4], Дикмиером и Лазардом[5]. Заметим, что самый сложный случай $n = 7$ был окончательно решен Бедратюком[6] лишь в 2007 г. с помощью компьютерной системы `Maple`.

Случаи $n = 9$ и 10 были решены Брауэром и Поповичев[7] [8] в 2010 г. также

[1] Kruglikov, B., Lychagin, V.: *Invariants of pseudogroup actions: homological methods and finiteness theorem* // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. – **3**(5–6). – P. 1131–1165 (2006).

[2] Boole, G.: *Exposition of a general theory of linear transformations* // Camb. Math. J. – **3**. – P. 1–20, 106–119 (1841–1842).

[3] Hermite, Ch.: *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.* Cambridge and Dublin Math. J. (1854).

[4] Shioda, T.: *On the graded ring of invariants of binary octavics* // Amer. J. Math. – **89**. – P. 1022–1046 (1967).

[5] Dixmier, J., Lazard, D.: *Le nombre minimum d'invarients fondamentaux pour les formes binaires de degree 7* // Potrigaliae Math. – **43**(3). – P. 377–392 (1985–1986).

[6] Bedratyuk, L. *On complete system of invariants for the binary form of degree 7* // Journal of Symbolic Computation. – **42**. – P. 935–947 (2007).

[7] Brouwer, A.E., Popovich, M.: *The invariants of the binary nonic* // Journal of Symbolic Computation. – **45**. – P. 709–720 (2010).

[8] Brouwer, A.E., Popovich, M.: *The invariants of the binary decimic* // Journal of Symbolic Computation. – **45**. – P. 837–843 (2010).

с помощью компьютера.

Отметим, что существующие на сегодняшний день методы *в принципе не позволяют* получить единой классификации бинарных форм произвольной степени n. Все указанные выше классификации были проведены для конкретного (и весьма небольшого) n, в то время как результаты и методы, используемые для разных n, принципиально отличаются друг от друга.

Еще один существенный недостаток этих классификаций заключается в невозможности их применения к алгебраически незамкнутому полю $\mathbb{R}$.

Ситуация с классификацией тернарных форм еще более плачевна, нежели в случае форм бинарных.

Случай $n = 2$ является классическим результатом из курса линейной алгебры и был известен (в том или ином виде) еще древним грекам.

Случай $n = 3$ был исследован Вейерштрассом. Им было доказано, что каждая неособая тернарная форма приводится к так называемой нормальной форме Вейерштрасса

$$y^2z + x^3 + pxz^2 + qz^3.$$

Оказывается, что две тернарные формы эквивалентны если и только если коэффициенты их нормальных форм Вейерштрасса совпадают.

Из коэффициентов p и q нормальной формы Вейерштрасса можно составить j-инвариант тернарной формы $j = p^3/q^2$. Оказывается, что две кривые $\{f = 0\}$ и $\{\widetilde{f} = 0\}$ проективно эквивалентны если и только если j-инварианты форм f и $\widetilde{f}$ совпадают.

Случай $n = 4$ был решен совсем недавно усилиями многих математиков. Окончательный ответ был получен усилиями Диксмиера, Шиоды и Брауэра[9].

Таким образом, к сегодняшнему дню неизвестна даже классификация квантик (то есть тернарных форм пятой степени), не говоря уже об общем случае n.

Цель и задачи диссертационного исследования. В настоящей работе рассматриваются задачи классификации орбит бинарных и тернарных форм относительно действия групп GL_2 и GL_3 соответственно.

Перечислим основные задачи исследования:

[9] Brouwer, A.E.: *Invariants of the ternary quartic* // `http://www.win.tue.nl/~aeb/math/ternary_quartic.html`

1) Найти алгебру дифференциальных инвариантов действия групп GL_2 и SL_2 на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(2)$.

2) В терминах построенных алгебр найти необходимое и достаточное условие локальной GL_2- и SL_2-эквивалентности гладких функций на плоскости.

3) Явно найти алгебры дифференциальных инвариантов действия групп GL_2 и GL_3 на пространствах бинарных и тернарных форм соответственно.

4) В терминах найденных алгебр инвариантов найти критерий глобальной GL_2- и GL_3-эквивалентности бинарных и тернарных форм соответственно.

5) Явно найти алгебру дифференциальных инвариантов действия группы SO_3 на пространстве тернарных форм и в терминах этой алгебры найти критерий глобальной SO_3-эквивалентности тернарных форм.

Объектом исследования являются бинарные и тернарные формы, а также дифференциальные уравнения Эйлера и алгебры дифференциальных инвариантов.

Теоретическую и методологическую основу исследования составляют с одной стороны методы современной дифференциальной геометрии и геометрии дифференциальных уравнений, а с другой — методы алгебраической геометрии и классической теории инвариантов.

Научная новизна исследования. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Для действия групп GL_2 и SL_2 на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(2)$ найдены алгебры дифференциальных инвариантов. А именно, указаны базисные дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования и сизигии.

2) В терминах найденных алгебр дифференциальных инвариантов найдены условия локальной GL_2 и SL_2-эквивалентности регулярных гладких функций от двух переменных.

3) Для действия групп GL_2 и SL_2 на двумерном дифференциальном уравнении Эйлера $xf_x + yf_y = nf$ найдены алгебры дифференциальных инвариантов.

4) В терминах найденных алгебр дифференциальных инвариантов найдены условия глобальной GL_2 и SL_2-эквивалентности бинарных форм над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

5) Для действия групп GL_3, SL_3 и SO_3 на трехмерном дифференциальном уравнении Эйлера $xf_x+yf_y+zf_z = nf$ найдены поля дифференциальных инвариантов.

6) В терминах найденных полей дифференциальных инвариантов найдены условия глобальной GL_3-, SL_3- и SO_3-эквивалентности тернарных форм.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для изучения других действий алгебраических групп на аффинных многообразиях, а также для изучения различных проблем, связанных с классификацией орбит бинарных и тернарных форм. В диссертационной работе приведены примеры применения полученных результатов к классификации алгебраических проективных кривых, однородных функций, а также к нахождению полиномиальных инвариантов бинарных и тернарных форм. На основе этих результатов составлены спецкурсы для студентов и аспирантов, которые читаются в Институте проблем управления РАН. Результаты диссертационного исследования применяются в научных разработках лаборатории №6, что подтверждается актом внедрения.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

— на семинаре “Группы Ли и теория инвариантов” под руководством профессора Э. Б. Винберга и профессора А. Л. Онищика (Москва, МГУ им.

М. В. Ломоносова, апрель 2010 г.)

— на семинаре по геометрии дифференциальных уравнений под руководством профессора И. С. Красильщика (Москва, Независимый московский университет, май, декабрь 2010 г. и октябрь 2011 г.);

— на Международной конференции «Геометрия в Одессе» (Одесса, Украина, 25–28 мая 2010 г.);

— на Международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвященной 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова (Москва, Россия, 18–21 августа 2010 г.);

— на Международной конференции «Геометрия в Кисловодске» (Кисловодск, Россия, 13–20 сентября 2010 г.);

— на IX Всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, Россия, 1–6 октября 2010 г.);

— на Второй Российской школе-конференции для молодых ученых с международным участием «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (Тверь, Россия, 8–12 декабря 2010 г.);

— на семинаре отдела геометрии и топологии МИАН "Геометрия, топология и математическая физика" под руководством академика РАН С. П. Новикова и член-корреспондента РАН В. М. Бухштабера (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, апрель 2011 г.);

— на XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, Россия, 11–15 апреля 2011 г.); работа отмечена грамотой за лучший доклад на секции «Математика и механика»;

— на семинаре кафедры дифференциальных уравнений под руководством д.ф.-м.н. профессора Ю. В. Обносова (Казань, Казанский государственный университет, май 2011 г.);

— на Международной конференции «Геометрия. Управление. Экономика» (Астрахань, Россия, 18–23 августа 2011 г.);

— на семинаре отдела кафедры дифференциальной геометрии и приложений "Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством академика РАН А. Т. Фоменко (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, октябрь, ноябрь 2011 г.);

— на семинарах лаборатории №6 ИПУ РАН под руководством д.ф.-м.н. профессоров В. В. Лычагина и А. Г. Кушнера (Москва, ИПУ РАН, 2010–2011 гг.).

Публикации. Результаты, основные положения и выводы диссертационного исследования отражены в 13 публикациях в периодических изданиях и тематических сборниках общим объемом 3,60 п. л. В том числе 5 статей опубликованы в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. 6 опубликованных научных работ по теме исследования выполнены без соавторов, 7 работ написаны совместно, при этом вклад автора составляет от 40% до 75%.

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 130 страницах, состоит из введения, трех глав, двух приложений и списка литературы, содержащего 50 наименований. Диссертация содержит 1 таблицу и 5 рисунков.

Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация пунктов и подпунктов — тремя и четырьмя соответственно. Например, номером 3.2 обозначен второй параграф третьей главы, а номером 3.2.1 — первый пункт второго параграфа третьей главы.

Нумерация диаграмм, таблиц и теорем в тексте диссертации сквозная, а нумерация формул и рисунков в каждой главе своя.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дается общая характеристика работы, формулируются основные результаты и приводится краткий исторический обзор результатов по классификации бинарных и тернарных форм.

В **первой главе** «Исторический обзор и необходимые сведения» формулируются основные проблемы, исследуемые в диссертации, приводится исторический обзор уже известных результатов в этой области, а также описывается новый подход к исследованию этих проблем и приводятся необходимые понятия и сведения, используемые в диссертационной работе.

Остановимся более подробно на содержании первой главы.

В п. 1.1 «Исторический обзор» приводятся формулировки основных проблем, исследуемых в диссертации, описываются известные подходы к исследованию этих проблем и даются результаты, полученные к настоящему времени.

Пусть $V_n^2 = \mathsf{S}^n(\mathbb{C}^2)^*$ — пространство бинарных форм степени n от переменных x, y над полем $\mathbb{C}$, т.е.

$$V_n^2 = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha_i x^i y^{n-i} : \alpha_i \in \mathbb{C} \Big\}. \tag{1}$$

Рассмотрим следующее действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на пространстве V_n^2: подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует стандартными заменами координат, а центр $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует гомотетиями $f \mapsto \lambda f$, где $f \in V_n^2$ и $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Рассматривается следующая задача: *классифицировать* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$*-и* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$*-орбиты бинарных форм.*

Аналогичным образом ставится вопрос о классификации орбит тернарных форм, т.е. однородных многочленов от трех переменных над полем $\mathbb{C}$: *классифицировать* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$*- и* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$*-орбиты тернарных форм.*

Основным методом, применяемым для решения этих задач, до недавних пор оставалось вычисление алгебры (или поля) инвариантов. Однако в рамках этого метода полностью решить эти проблемы не представляется возможным.

А именно, к настоящему времени известны классификация орбит бинарных форм степени $n \leqslant 10$ и тернарных форм степени $n \leqslant 4$.

В п. 1.2 «Необходимые сведения» мы описываем подход к решению проблем классификации орбит бинарных и тернарных форм, связанный с дифференциальными уравнениями в частных производных, а также приводим необходимые сведения, используемые в дальнейшем.

Основной идеей в задачах классификации орбит бинарных и тернарных форм является рассмотрение *дифференциального уравнения Эйлера*

$$\sum_{i=1}^{p} x_i f_{x_i} = nf.$$

Легко видеть, что при $p = 2$ (соответственно $p = 3$) бинарные формы (соответственно тернарные формы) степени n являются решениями дифференциального уравнения Эйлера. Такая интерпретация бинарных и тернарных форм дает возможность применить к нашим априори алгебраическим задачам геометрические методы из теории дифференциальных уравнений. Оказывается, что синтез идей из дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии и классической теории инвариантов позволяет решить проблемы классификации бинарных и тернарных форм, остававшихся нерешенными более 150 лет.

Во **второй главе** «Классификация орбит бинарных форм» рассматривается классификация орбит бинарных форм над полем $\mathbb{C}$ относительно действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. По заданной бинарной форме f мы строим многочлен F от трех переменных (называемый многочленом зависимостей), который однозначно определяет $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиту бинарной формы f.

Также мы приводим листинг компьютерной программы (см. Приложение 1), которая позволяет быстро вычислять многочлен зависимостей. Приведены примеры вычисления таких многочленов для различных бинарных форм, в том числе и для высокой степени 10 и для произвольной степени n.

В п. 2.1 «Классификация орбит гладких функций» решается более грубая задача: классифицируются GL_2-орбиты ростков гладких функций на плоскости. Для этого мы используем теорию дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований.

Рассмотрим пространство $C^\infty(2)$ гладких функций от переменных x, y над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство k-джетов функций $J^k(2)$ с каноническими координатами $(x, y, u, u_{10}, u_{01}, \ldots)$. Группа GL_2 действует на пространстве ростков гладких функций $C^\infty(2)$. А именно, группа $\mathrm{SL}_2 \subset \mathrm{GL}_2$ действует линейными заменами координат, а центр действует гомотетиями $f \mapsto \lambda f$, где $f \in C^\infty(2)$. Это действие поднимается до действия в пространстве k-джетов $J^k(2)$.

Теорема 6. *Алгебра дифференциальных инвариантов указанного выше действия группы* GL_2 *на пространстве* $J^\infty(2)$ *локально порождается ин-*

вариантами

$$E := \frac{xu_{10} + yu_{01}}{u} \quad \text{и} \quad F := \frac{u_{01}^2 u_{20} - 2u_{10}u_{01}u_{11} + u_{10}^2 u_{02}}{u^3}$$

и инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 := x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} \quad \text{и} \quad \nabla_2 := \frac{u_{01}}{u}\frac{d}{dx} - \frac{u_{10}}{u}\frac{d}{dy};$$

она разделяет GL_2*-орбиты и обладает одной сизигией*

$$(E_{22} - F_1)E - 3E_2^2 + 3E_1F - 4EF = 0 \tag{2}$$

(здесь $I_j := \nabla_j I$*).*

Наконец, в терминах найденной алгебры инвариантов можно описать GL_2-орбиты гладких функций.

Назовем функцию $f \in C^\infty(2)$ *регулярной в окрестности* Ω, если функции $E(f)$ и $F(f)$ независимы в Ω, т.е. если

$$\widehat{d}E(f) \wedge \widehat{d}F(f) \not\equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3}$$

Для регулярной функции f существуют следующие зависимости, удовлетворяющие уравнению сизигии:

$$\begin{cases} E_1(f) = A_1(E(f), F(f)), \\ E_2(f) = A_2(E(f), F(f)), \\ F_1(f) = B_1(E(f), F(f)), \\ F_2(f) = B_2(E(f), F(f)). \end{cases}$$

Заметим, что уравнение сизигии есть не что иное как условие интегрируемости этой системы уравнений.

Теорема 7. *Четверка функций* (A_1, A_2, B_1, B_2)*, удовлетворяющая уравнению сизигии, локально задает орбиту регулярной функции* $f \in C^\infty(2)$*.*

Эти теоремы легко обобщаются на случай действия группы SL_2.

В п. 2.2 «$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм» полностью решается проблема классификации $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм. Для этого бинарные формы степени n представляются как решения двумерного дифференциального уравнения Эйлера $xf_x + yf_y = nf$, и рассматривается действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на этом уравнении. В результате удается применить дифференциально-геометрические методы, аналогичные тем, которые использовались для описания орбит гладких функций.

Уравнению $xf_x + yf_y = nf$ соответствует алгебраическое многообразие

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}(2) = \{xu_{10} + yu_{01} = nu\} \subset J^1(2). \tag{4}$$

Как и раньше, первым этапом описания орбит бинарных форм является нахождение алгебры дифференциальных инвариантов действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на многообразии $\mathcal{E}^{(\infty)}$.

Теорема 10. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *на многообразии* $\mathcal{E}^{(\infty)}$ *свободно порождается дифференциальным инвариантом*

$$H := \frac{u_{20}u_{02} - u_{11}^2}{u^2}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{u_{01}}{u}\frac{d}{dx} - \frac{u_{10}}{u}\frac{d}{dy}.$$

В терминах этой теоремы удается полностью описать $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм.

А именно, положим

$$I_1 := H, \quad I_2 := \nabla H \quad I_3 := \nabla^2 H.$$

Ограничения этих дифференциальных инвариантов на график $L_f^4 \subset \mathcal{E}^{(3)}$ бинарной формы f являются однородными рациональными функциями от переменных x и y.

Значит, между ними существует алгебраическая зависимость:

$$F(I_1(f), I_2(f), I_3(f)) = 0.$$

Введем порядок на переменных I_k, а именно, будем считать, что $I_1 \prec I_2 \prec I_3$. Будем считать, что многочлен F имеет минимальную степень относительно этого порядка и определен с точностью до умножения на ненулевую константу. В этих предположениях многочлен F определен однозначно. Мы будем называть его многочленом зависимостей для бинарной формы f.

Основная теорема этой главы формулируется следующим образом.

Теорема 11. *Пусть f_1, f_2 — бинарные формы степени n и F_1, F_2 — соответствующие многочлены зависимостей. Тогда формы f_1 и f_2 являются* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$*-эквивалентными тогда и только тогда, когда $F_1 = F_2$.*

Приводятся примеры вычисления многочленов зависимостей для конкретных бинарных форм. В Приложении 1 также приведен листинг компьютерной программы на языке символьных вычислений `Maple-13`, с помощью которой и были вычислены эти многочлены зависимостей.

В п. 2.3 «Обобщения» идеи и методы, примененные нами для классификации $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм, обобщаются на различные другие действия.

В п. 2.4 «Приложения» приводятся формулировки различных известных проблем, которые сводятся к уже решенным нами проблемам классификаций бинарных форм.

В **третьей главе** «Классификация орбит тернарных форм» решается задача описания $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-орбит тернарных форм. Как и в случае бинарных форм, решение этой проблемы состоит из двух частей.

В первой части мы описываем алгебру дифференциальных инвариантов действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ на трехмерном дифференциальном уравнении Эйлера $xf_x + yf_y + zf_z = nf$. Во второй части мы классифицируем тернарные формы, представляя их как решения уравнения Эйлера.

В п. 3.1 «Поле инвариантов» описывается построение поля дифференциальных инвариантов действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ на трехмерном дифференциальном уравнении Эйлера

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}(3) = \{xu_{100} + yu_{010} + zu_{001} = nu\} \subset J^1(3).$$

Основным объектом в этом построении являются *инвариантные k-формы Q_k*, определяемые следующим образом:

$$Q_k(x, u_\sigma) = \sum_{\sigma:|\sigma|=k} \frac{u_\sigma}{u} \frac{(dx)^\sigma}{\sigma!}.$$

Теперь можно построить базисные дифференциальные инварианты и инвариантные дифференцирования.

Предложение 5. *Функция*

$$H = \frac{1}{u^3} \cdot \begin{vmatrix} u_{200} & u_{110} & u_{101} \\ u_{110} & u_{020} & u_{011} \\ u_{101} & u_{011} & u_{002} \end{vmatrix}$$

является дифференциальным инвариантом порядка 2.

На поле дифференциальных инвариантов существует тройная скобка Намбу $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$, *определяемая по формуле*

$$\widehat{d}I_1 \wedge \widehat{d}I_2 \wedge \widehat{d}I_3 = \{I_1, I_2, I_3\}\widehat{d}\Omega,$$

где $\widehat{d}\Omega = \widehat{d}x \wedge \widehat{d}y \wedge \widehat{d}z$ *— форма объема.*

Полагая $I_1 = \ln|u|$ *и* $I_2 = H$, *получаем инвариантное дифференцирование* ∇:

$$\frac{1}{u}\widehat{d}u \wedge \widehat{d}H \wedge \widehat{d}I = (\nabla I)\widehat{d}\Omega.$$

Дифференцирование r *является инвариантным и для любой однородной степени* s *функции* I *имеем* $rI = sI$.

Теперь построим еще одно инвариантное дифференцирование. Для этого рассмотрим бесконечный джет, в котором квадрика Q_2 невырождена. Касательное пространство в этом джете трехмерно и содержит два инвариантных дифференцирования r и ∇. Эти дифференцирования ортогональны относительно квадрики Q_2, поэтому существует единственное с точностью до множителя векторное поле δ, ортогональное полям r и ∇ относительно Q_2. Нормируем его условием

$$\begin{vmatrix} r(x) & r(y) & r(z) \\ \nabla(x) & \nabla(y) & \nabla(z) \\ \delta(x) & \delta(y) & \delta(z) \end{vmatrix} = Q_2(\nabla, \nabla).$$

Ясно, что дифференцирование δ является инвариантным и независимым с r и ∇.

Наконец, найдем четыре дифференциальных инварианта порядка 3. Для этого запишем инвариантную 3-форму Q_3 в «инвариантном базисе» $\{r^*, \nabla^*, \delta^*\}$ и рассмотрим ее коэффициенты. Иначе говоря, положим

$$I = Q_3(\nabla,\nabla,\nabla), \quad J = Q_3(\nabla,\nabla,\delta), \quad K = Q_3(\nabla,\delta,\delta), \quad L = Q_3(\delta,\delta,\delta).$$

Теорема 20. *Поле дифференциальных инвариантов действия группы* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ *на многообразии* $\mathcal{E}^{(\infty)}$ *порождается инвариантами* H, I, J, K *и* L *и дифференцированиями* ∇ *и* δ; *оно разделяет неособые орбиты. Дифференциальные сизигии этого поля порождаются одним соотношением на инвариантах порядка 3 и тремя соотношениями на инвариантах порядка 4.*

В п. 3.2 «Классификация регулярных тернарных форм» решается основная проблема описания $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-орбит тернарных форм с ненулевым гессианом. Для этого применяются теоремы из предыдущего раздела о структуре поля дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим дифференциальные инварианты

$$H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ \nabla I,\ \nabla J,\ \nabla K,\ \nabla L,\ \delta L.$$

Их ограничения на график $L_f^4 \subset \mathcal{E}^{(3)}$ тернарной формы f являются однородными рациональными функциями от переменных x, y, z и определяют рациональное отображение

$$\pi_f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^{10}, \qquad \pi_f(a) = (H([f]_a^4), I([f]_a^4), \dots, \delta L([f]_a^4)).$$

Значит, между этими ограничениями существуют алгебраические зависимости. Обозначим множество этих зависимостей через $\mathscr{D}_f$ и образ отображения π_f через Σ_f.

Основная теорема этой главы формулируется следующим образом.

Теорема 21. *1. Тернарные формы f и $\widetilde{f}$ с ненулевым гессианом эквивалентны если и только если $\Sigma_f = \Sigma_{\widetilde{f}}$.*

2. Тернарные формы f и $\widetilde{f}$ с ненулевым гессианом эквивалентны если и только если $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{\widetilde{f}}$.

В п. 3.3 «Классификация сингулярных тернарных форм» решается проблема описания $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-орбит тернарных форм с нулевым гессианом.

Для построения алгебр дифференциальных инвариантов рассматриваются два случая: $\operatorname{rk} Q_2 = 2$ и $\operatorname{rk} Q_2 = 1$.

В первом случае рассматривается система дифференциальных уравнений $\mathcal{H} = \mathcal{E}^{(1)} \cap \{H = 0\}$. Выберем ненулевой вектор $\gamma \in \ker Q_2$ и нормируем его условием $Q_3(\gamma, \gamma, \gamma) = 1$. Т.к. $\dim \ker Q_2 = 1$, этот вектор является инвариантным дифференцированием.

Используя дифференцирование γ, построим дифференциальный инвариант $M = Q_4(\gamma, \gamma, \gamma, \gamma)$ порядка 4.

Теорема 22. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ на многообразии $\mathcal{H}^{(\infty)}$ свободно порождается инвариантом M и дифференцированием γ.*

Рассмотрим теперь дифференциальные инварианты M, γM, $\gamma^2 M$, $\gamma^3 M$. Их ограничения на график $L_f^7 \subset \mathcal{H}^{(5)}$ тернарной формы f являются однородными рациональными функциями от переменных x, y, z. Значит, между ними существует алгебраическая зависимость:

$$S_f(M, \gamma M, \gamma^2 M, \gamma^3 M) = 0.$$

Будем считать, что многочлен S_f неприводим, имеет минимальный порядок и определен с точностью до умножения на ненулевую константу.

Теорема 24. *Тернарные формы f и $\widetilde{f}$, для которых $\operatorname{rk} Q_2 = 2$, эквивалентны если и только если $S_f = S_{\widetilde{f}}$.*

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 11.

Теперь перейдем к случаю $\operatorname{rk} Q_2 = 1$. В этом случае рассмотрим уравнение $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{(2)} \cap \{\Delta_i = 0\}$, где Δ_i — миноры матрицы Гессе размера 2×2. Размерности всех продолжений $\mathcal{F}^{(k-2)} \subset J^k\mathbb{C}^3$ уравнения $\mathcal{F}$ не превосходят 9, поэтому у него нет дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований. Кроме того, т.к. размерность орбиты графика L_f тернарной формы f, для которой $\operatorname{rk} Q_2 = 1$, также не превосходит 9, то эта форма эквивалентна форме x^n.

Теорема 24. *Тернарные формы f и $\widetilde{f}$, для которых $\operatorname{rk} Q_2 = 1$, эквивалентны.*

В п. 3.4 «Метрическая классификация тернарных форм» методы, описанные в предыдущих разделах, применяются к проблеме метрической классификации тернарных форм.

В п. 3.5 «Обобщения и приложения» приводятся обобщения рассмотренных выше действий групп $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ и приложения этих действий и обобщений к решению различных проблем.

В **Приложении 1** приводятся листинги компьютерных программ, используемых для работы с действием группы GL_2 на гладких функциях и бинарных формах, а в **Приложении 2** — листинг компьютерной программы для вычисления дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований действия группы GL_3 на трехмерном дифференциальном уравнении Эйлера. Эти программы написаны на языке системы компьютерной алгебры `Maple-13`.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Бибиков, П.В.: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-*орбиты бинарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков, В.В. Лычагин // ДАН. – **435**(4). – С. 439–440 (2010) – 0,13 п.л.

2. Bibikov, P.V.: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-*orbits of binary rational forms* [Текст] / P.V. Bibikov, V.V. Lychagin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – **32**(1). – P. 94–101 (2011) – 0,51 п.л.

3. Бибиков, П.В.: $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-*орбиты рациональных тернарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков, В.В. Лычагин // ДАН. – **438**(4). – С. 295–297 (2011) – 0,19 п.л.

4. Бибиков, П.В.: *Классификация тернарных форм с нулевым гессианом* [Текст] / П.В. Бибиков // Известия ВУЗов. Математика. – № 9. – С. 99–101 (2011) – 0,21 п.л.

5. Бибиков, П.В.: *Метрическая классификация алгебраических проективных кривых* [Текст] / П.В. Бибиков // Известия ПГПУ им. Белинского. – № 26. – С. 36–42 (2011) – 0,65 п.л.

Публикации в других изданиях

6. Бибиков, П.В.: SL_2-*орбиты бинарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков, В.В. Лычагин // Сборник тезисов Международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников». – С. 11–12 (2010) – 0,13 п.л.

7. Бибиков, П.В.: *Классификация* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-*орбит бинарных рациональных форм* [Текст] / П.В. Бибиков, В.В. Лычагин // Тезисы докладов Международной конференции «Геометрия в Кисловодске – 2010». – С. 20 (2010) – 0,06 п.л.

8. Бибиков, П.В.: *Классификация* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-*орбит бинарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков, В.В. Лычагин // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. – **40**. – С. 72–75 (2010) – 0,31 п.л.

9. Бибиков, П.В.: *Классификация* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$*-орбит тернарных форм* [Электронный ресурс] / П.В. Бибиков // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011». – М.: МАКС Пресс. – ISBN 978-5-317-03634-8 (2011) – 0,13 п.л.

10. Bibikov, P.V.: *Projective classification of binary and ternary forms* P.V. Bibikov, V.V. Lychagin // Journal of Geometry and Physics. – doi:10.1016/j.geomphys.2011.05.001 – **61**(10). – P. 1914–1927 (2011) – 0,88 п.л.

11. Бибиков, П.В.: $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$*-орбиты тернарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков // Тезисы докладов Международной конференции «Геометрия. Управление. Экономика». – С. 7 (2011) – 0,06 п.л.

12. Бибиков, П.В.: *Автоморфные дифференциальные уравнения и* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$*-орбиты бинарных форм* [Текст] / П.В. Бибиков // Тезисы докладов VI Уфимской Международной конференции «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения». – С. 32–33 (2011) – 0,13 п.л.

13. Бибиков, П.В.: *Проективная классификация алгебраических проективных кривых* [Текст] / П.В. Бибиков // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. – **44**. – С. 92–94 (2011) – 0,21 п.л.